

www.e-rara.ch

Positiones arithmeticae de seriebus infinitis earumque summa finita

Bernoulli, Jakob

Basileae, 1689

Universitätsbibliothek Basel

Persistent Link: <https://doi.org/10.3931/e-rara-66871>

www.e-rara.ch

Die Plattform e-rara.ch macht die in Schweizer Bibliotheken vorhandenen Drucke online verfügbar. Das Spektrum reicht von Büchern über Karten bis zu illustrierten Materialien – von den Anfängen des Buchdrucks bis ins 20. Jahrhundert.

e-rara.ch provides online access to rare books available in Swiss libraries. The holdings extend from books and maps to illustrated material – from the beginnings of printing to the 20th century.

e-rara.ch met en ligne des reproductions numériques d'imprimés conservés dans les bibliothèques de Suisse. L'éventail va des livres aux documents iconographiques en passant par les cartes – des débuts de l'imprimerie jusqu'au 20e siècle.

e-rara.ch mette a disposizione in rete le edizioni antiche conservate nelle biblioteche svizzere. La collezione comprende libri, carte geografiche e materiale illustrato che risalgono agli inizi della tipografia fino ad arrivare al XX secolo.

Nutzungsbedingungen Dieses Digitalisat kann kostenfrei heruntergeladen werden. Die Lizenzierungsart und die Nutzungsbedingungen sind individuell zu jedem Dokument in den Titelinformationen angegeben. Für weitere Informationen siehe auch [Link]

Terms of Use This digital copy can be downloaded free of charge. The type of licensing and the terms of use are indicated in the title information for each document individually. For further information please refer to the terms of use on [Link]

Conditions d'utilisation Ce document numérique peut être téléchargé gratuitement. Son statut juridique et ses conditions d'utilisation sont précisés dans sa notice détaillée. Pour de plus amples informations, voir [Link]

Condizioni di utilizzo Questo documento può essere scaricato gratuitamente. Il tipo di licenza e le condizioni di utilizzo sono indicate nella notizia bibliografica del singolo documento. Per ulteriori informazioni vedi anche [Link]

Vi. Ob.
H. 41.POSITIONES ARITHMETICÆ
DESERIEBVS
INFINITIS*Earumq̃*

SUMMA FINITA,

Quas

DEO BENEDICENTE

Ac

Jubente Philosophorum Ordine

Auctore Præsidente

JACOBO BERNOULLI,

Math. P. P.

Pro virili tueri conabitur

JOHANN. JACOBUS FRITZIUS Bas.

Magist. Cand.

*Ad diem 7. Junii M DC LXXXIX. horis
locoq̃ solitis.*Kirchenbibliothek
Basel.

BASILEÆ,

Typis JOHANN. CONRADI à MECHEL.



Viris

*Amplissimis, Prudentissimis, Nobilissimis,
Gravissimis,*

DN. EMANUELI SOCINO, Inclytæ Rei-
pub. Patriæ Consuli, Patriæ Patri.

DN. JOH. CONRADO HARDERO, Ar-
chigrammateo & Scholarchæ.

DN. EMANUELI SCHERBIO, Senatori.

Nec non

Plur. Reverendis, Spectatissimis Viris,

DN. JOH. JACOBO MUSPACHIO, Ec-
clesiastæ in æde Franciscanorum & Pto-
chotrophio meritissimo.

DN. CHRISTOPHORO STUPANO,
Mercatori Integerrimo.

*Fautoribus, Patronis, suis è Sacro Fonte Suscepto-
ribus honoratissimis, Disputationem hanc,
quâ par est observantiâ ac submissione,*

D. D. O.

JOH. JACOBUS FRITZIUS, Baf.
Mag. Cand.



PRÆFATIO.



Utm non ita pridem in Serierum Infinitarum speculationem incidissem, prima, cujus summa post Geometricam Progressionem ab aliis jam tractatam mihi sese offerebat, erat series fractionum, quarum denominatores Geometricâ, numeratores Arithmeticâ progressionem crescunt: quod cum Fratri indicâissem, non tantum mox idem adinvenit ille, sed & præterea novæ cujusdam fractionum seriei, cujus denominatores Trigonalia, ut vocantur, numerorum dupli erant, summam pervestigavit; quam verò & ipse, cum significâisset, postridiè detexi, propositis ei vicissim aliis nonnullis, quæ interea, ut clavus clavum trudere solet, occasione hæc repereram: Quibus inventis certatim alter alterum sic exercuimus, ut paucorum dierum spatio non tantum serierum illarum, quas Cel. Leibnitiuss in Actis Erud. Lips. anno 1682. M. Febr. & 1683. M. Octob. recenset, nosq; paulò antea mirati fuimus, summas dare possemus, sed & plura alia eaq; non contemnenda ex gemino duntaxat fundamento invenerimus, quorum unum consistit in resolutione seriei in alias infinitas series, alterum in subductione seriei uno alterovè termino mutilatæ à seipsâ integrâ. Horum verò præcipua (cum eorum nihil apud hos quos legi hætenus, publicatum viderim) unâ (& forte alterâ) Disputatione enucleanda proponam, præmissis nonnullis, quæ passim apud alios quoque vulgatæ præstant, Propositionibus, ne illas aliunde petere opus esset. Cæterum quantæ sit necessitatis pariter & utilitatis hæc serierum contemplatio, ei sanè ignotum esse non poterit, qui perspectum habuerit, ejusmodi series sacram quasi esse anchoram, ad quam in maximè arduis & desperata solutionis Problematis, ubi omnes aliæ humani ingenii vires naufragium passa, velut ultimi remedii loco confugiendum est.

Axiomata seu Postulata.

1. Omne quantum est divisibile in partes se minores.
2. Omni quantitate finitâ potest accipi major.
3. Si quantitas quæpiam multata parte sui aliquâ subtrahitur à seipsâ integrâ, relinquitur illa pars.

Propositiones:

I. Quod datâ quâvis quantitate minus est, illud est non-quantum seu nihil.

Dem. Nam si quantum esset, dividi posset in partes se minores, per Ax. 1. non igitur esset datâ quâvis quantitate minus, contrâ hyp.

II. Quod datâ quâvis quantitate majus est, infinitum est.

Nam si finitum esset, illo posset accipi quantitas major, per Ax. 2. non igitur quâvis datâ quantitate foret majus, contrâ hyp.

III. Omnis Progressio Geometrica continuari potest per terminos infinitos.

Semper enim fieri potest: Ut primus terminus ad secundum, sic postremus ad sequentem, & sequens ad alium & alium sine fine in infinitum; quorum quidem terminorum nullus æquari potest vel nihilo vel infinito, cum secus ad illum præcedens eam rationem habere non posset, quam habet primus ad secundum, contr. defin. progr.

IV. Si sit Progressio Geometrica quacunque A, B, C, D, E; & alia Arithmetica totidem terminorum A, B, F, G, H, incipiens ab iisdem terminis A & B, erunt reliquorum singuli in Geometricâ singulis ordine sibi respondentibus in Arithmeticâ majores, tertius tertio, quartus quarto, ultimus ultimo, adeoque omnes omnibus.

Quia enim $A : B :: B : C :: C : D :: D : E$. erit per 25. 5. Eucl. tum $A + C > 2B \propto$ (ex nat. Progr. Arith.) $A + F$; unde $C > F$; tum $A + D > B + C > B + F \propto A + G$; unde $D > G$; tum $A + E > B + D > B + G \propto A + H$; unde $E > H$. Quæ erant demonstr.

V. In Progressione Geometricâ crescente A, B, C, D, E perveniri tandem potest ad terminum E quovis dato Z majorem.

Incipiat ab iisdem terminis Progressio Arithm. A, B, F, G, H, continuata quousque ultimus H superet Z (id enim fieri posse claret,) tum verò continuetur Geometrica per terminos totidem, eritque per præced. postremus $E > H > Z$. Q. E. D.

Coroll. Hinc in Progr. Geom. crescente infinitorum terminorum postremus terminus est ∞ , per Prop II. (∞ est Nota Infiniti.)

VI. In Progreff. Geometr. decrescente A, B, C, D, E pervenitur tandem ad terminum E quovis dato Z minorem.

COR-

Constituatur Progressio ascendens Z, T, X, V, T, in ratione B ad A, quousque ultimus terminus T superet A, (quod fieri posse per præced. constat;) tum continuetur altera descendendo per totidem terminos A, B, C, D, E; eritque ultimus E < dato Z. Quia enim Progressiones A, B, C, D, E, & T, V, X, T, Z, per eandem rationem A ad B progrediuntur, & terminos numero æquales habent, erit ex æquo A. E :: T. Z. sed A < T, per const. Ergo & E < Z. Q. E. D.

Coroll. Hinc in Progr. Geom. decrescente in infinitum continuatâ ultimus terminus est o, per Prop. I.

VII. In omni Progr. Geom. A, B, C, D, E, primus terminus est ad secundum, sicut summa omnium excepto ultimo ad summam omnium excepto primo. (A. B :: A + B + C + D. B + C + D + E.)

Quia enim A. B :: B. C :: C. D :: D. E. erit per 12. 5. Eucl. A. B :: A + B + C + D. B + C + D + E. Q. E. D.

VIII. Progressionis Geom. cujuscunque A, B, C, D, E, summam S invenire. Per præced. est A. B :: S - E. S - A; quare convertendo A. A = B :: S - E. A = E; unde S - E ∝ $\frac{A \ln A = E}{A = B}$ & S ∝ $\frac{A \ln A = E}{A = B} + E$. (= denotat differentiam duarum quantitatum, quibus interseritur, cum non definitur, penes utram sit excessus.)

Coroll. Si Progressio Geom. descendendo continuetur in infinitum, adeoque ultimus terminus per Coroll. VI. evanescat, erit summa omnium $\frac{Aq}{A-B}$: unde liquet, quo pacto infiniti etiam termini finitam summam constituere possunt.

IX. Si Series infinita continuè proportionalium A, B, C, D, E, &c. decrescat in ratione A ad B, erunt summae omnium terminorum, omnium demto primo, omnium demtis duobus primis, &c. etiam continuè proportionales, & quidem in eadem ratione A ad B.

Quoniam A. B :: B. C :: C. D, erit tum Aq. Bq :: Bq Cq: tum etiam A. B :: A - B. B - C :: B - C. C - D, quare dividendo rationes æquales per æquales, $\frac{Aq}{A-B} \frac{Bq}{B-C} :: \frac{Bq}{B-C} \frac{Cq}{C-D}$, hoc est per Cor. præc. Summa omnium ad omnes sequentes primum, ut hi ad omnes sequentes secundum. Q. E. D. Et proinde per 19. 5. Eucl. summa omnium ad omnes sequentes primum, ut primus ad secundum. Q. E. D.

X. Series infinitæ fractionum, $\frac{a}{b}, \frac{a+c}{b+a}, \frac{a+2c}{b+2a}, \frac{a+3c}{b+3a}$, &c. quarum numeratores & denominatores crescunt Progressione Arithm. ultimus terminus est fractio, cujus numerator & denominator sunt communes progressionum diff. rentia.

Ad

Ad hoc analyticè investigandum consideretur quæstus terminus ut cognitus, & vocetur t ; numerus verò termini ut quæstus, & dicatur n ; eritque ex generatione progressionis terminus opatus $t \propto \frac{a+nc}{b+nd}$, ideoque $n \propto 1 + \frac{bt-a}{c-dt}$, quod æquari debet infinito: & quia numerator hujus fractionis est finitus (nam infinitus esse non potest, alias t deberet esse ∞ ; ideoque esset $c-dt$, ipsaque adeò fractio negativa quantitas, quod absurdum,) oportet ut denominator sit æqualis nihilo, ac proinde $c \propto dt$, & $t \propto \frac{c}{d}$. Q. E. D.

Breviùs ita: Ex seriei genesi patet, terminum infinitesimū esse $\frac{a+\infty c}{b+\infty d} \propto \frac{\infty c}{\infty d} \propto \frac{c}{d}$. Q. E. D.

Coroll. Summa omnium terminorum, sive ultimus primo major sit minorve, necessariò infinita est; infiniti enim termini minori horum duorum æquales infinitam dant summam: Unde à fortiori, &c.

XI. Fractionis ad aliam ratio composita est ex ratione directâ numeratorum & reciproca denominatorum.

$$\text{Nam } \frac{A}{B} \cdot \frac{C}{D} :: \frac{AD}{BD} :: AD : BC :: A : C + D : B. \text{ Q. E. D.}$$

XII. In serie fractionum, quarum numeratores crescunt progressionē Arithm. denominatores Geometricā, aut vice versā, ut $\frac{A}{F} \cdot \frac{A+C}{G} \cdot \frac{A+2C}{H} \cdot \frac{A+3C}{I}$, aut $\frac{F}{A} \cdot \frac{G}{A+C} \cdot \frac{H}{A+2C} \cdot \frac{I}{A+3C}$; Si N nomen ordinis ultimi termini ad unitatem majorem rationem habeat, quam G ad $G-F$, erit ille terminus ibi sequenti major, hic minor.

1. Hyp. Quia $N-1 > G-F$, erit convertendo $N, N-1 < G, F$, & $CN : CN-C < G, F$. Ergò $CN-C$ in $G > CN$ in F , ergò fortius (ob $AG > AF$) $A+NC-C$ in $G > A+CN$ in F , hoc est, Numerator termini N in $G >$ Numeratore termini sequentis in F : Sed ita se habet terminus N ad terminum sequentem, per præced: Quare terminus N major sequenti, & ita deinceps ab illo omnes. Q. E. D.

2. Hyp. Inversis invertendis eodem modo demonstratur.

XIII. Si infinite sint fractiones $\frac{A}{B} \cdot \frac{C}{D} \cdot \frac{E}{F} \cdot \frac{G}{H} \cdot \frac{I}{L} \cdot \frac{M}{N} \cdot \frac{O}{P}$, &c. quarum numeratores crescunt progr. Arithm: & denominatores Geom. erit ultimus terminus 0; sin illi crescunt Geom. hi Arithm. erit ultimus ∞ .

1. Hyp. Si primus terminus secundo non sit major, continuari saltem poterit Progressio, quousque præcedens superet sequentem, per præced. Esto $\frac{G}{H} > \frac{I}{L}$, & sint infiniti continuè proportionales G, I ,

Q. R,

$Q, R, \&c.$ unde propter $H, L, N, P \propto$ erunt & ipsæ fractiones $\frac{G}{H} \cdot \frac{I}{L}$.
 $\frac{Q}{N} \cdot \frac{R}{P}, \&c. \propto$ quæ ob $\frac{G}{H} > \frac{I}{L}$ in nihilum tandem abeunt per Cor. VI.
 Quare cum $Q > M, R > O, \&c.$ per IV. multò magis $\frac{G}{H} \cdot \frac{I}{L} \cdot \frac{M}{N} \cdot \frac{O}{P}, \&c.$
 in nihilum abibunt. Q.E.D.

2. Hyp. Nisi primus secundo minor sit, continuetur progressio,
 quousque præcedens sequenti minor fiat, per præc: Esto $\frac{G}{H} < \frac{I}{L}$, &
 sint infiniti $H, L, S, T, \&c. \propto$ unde propter $G, I, M, O, \&c. \propto$,
 & ipsæ fractiones $\frac{G}{H} \cdot \frac{I}{L} \cdot \frac{M}{S} \cdot \frac{O}{T}, \&c.$ proportionales erunt, quæ ob $\frac{G}{H} < \frac{I}{L}$
 in infinitum desinunt per Cor. V. Quare cum $S > N, T > P, \&c.$
 per IV. multò magis $\frac{G}{H} \cdot \frac{I}{L} \cdot \frac{M}{N} \cdot \frac{O}{P}, \&c.$ in infinitum excrecent. Q.E.D.

XIV. Invenire summam seriei infinita fractionum, quarum denomina-
 tores crescunt progressionem Geometricam quâcumque, numeratores verò progre-
 diuntur vel juxta numeros naturales 1, 2, 3, 4, &c. vel triangulares 1, 3, 6, 10, &c.
 vel pyramidales 1, 4, 10, 20, &c. aut juxta quadratos 1, 4, 9, 16, &c. aut cubos
 1, 8, 27, 64, &c. eorumvè æquemultiplices.

1. Si Numeratores progrediuntur juxta numeros naturales:

Summa invenitur, resolvendo seriem propositam A in alias infinitas series B, C, D, E, &c. quæ singulæ geometricè progrediuntur, quarumque summæ (si primam hîc excipias) novam Geometricam progressionem F constituunt per IX. cujus quidem, uti cæterarum, summa per Coroll. VIII. reperitur. En operationem:

$$A \propto \frac{a}{b} + \frac{a+c}{bd} + \frac{a+2c}{bda} + \frac{a+3c}{bd^2} \&c. \propto B + C + D + E + \&c.$$

$$B \propto \frac{a}{b} + \frac{a}{bd} + \frac{a}{bd^2} + \frac{a}{bd^3} \&c. \propto \frac{ad}{bd-b}$$

$$C \propto \frac{c}{bd} + \frac{c}{bdd} + \frac{c}{bd^2} + \frac{c}{bd^3} \&c. \propto \frac{c}{bd-b}$$

$$D \propto \dots + \frac{c}{bdd} + \frac{c}{bd^2} \&c. \propto \frac{c}{bd^2-bd}$$

$$E \propto \dots + \frac{c}{bd^3} \&c. \propto \frac{c}{bd^3-bd^2}$$

$$\&c. \propto \dots \&c. \propto \&c.$$

} F $\propto \frac{cd}{b \ln Q: d-1}$ cui additus primus terminus $\frac{ad}{bd-b}$ producit totius propositæ seriei A

$$\frac{ad}{b \ln d-1} + \frac{cd}{b \ln Q: d-1} \propto \text{summam.}$$

2. Si Numeratores sunt juxta Trigonaes:

Series proposita G resolvenda est in aliam H, cujus numeratores sint juxta præcedentem hypothesin, hoc modo: $\propto G$

$$G \propto \frac{c}{b} + \frac{3c}{bd} + \frac{6c}{b^2d} + \frac{10c}{b^3d^2} \&c.$$

$$\left. \begin{aligned} \frac{c}{b} + \frac{c}{bd} + \frac{c}{b^2d} + \frac{c}{b^3d^2} \&c. &\propto \frac{cd}{b^2d-b} \\ + \frac{2c}{bd} + \frac{2c}{b^2d} + \frac{2c}{bd^2} \&c. &\propto \frac{2c}{bd-b} \\ + \frac{3c}{b^2d} + \frac{3c}{bd^2} \&c. &\propto \frac{3c}{b^2d-bd} \\ + \frac{4c}{bd^2} \&c. &\propto \frac{4c}{bd^2-bdd} \\ \&c. &\propto \&c. \end{aligned} \right\}$$

$H \propto \frac{cd^2}{b \ln C: d-1}$ quandoquidem hæc series ad præced.
 $\frac{c}{bd} + \frac{2c}{b^2d} + \frac{3c}{bd^2} \&c. \propto \frac{cd}{b \ln Q: d-1}$
 se habeat ut dd ad $d-1$.

3. Si Numeratores sunt juxta Pyramidales:

Series resolvitur in aliam, cujus numeratores progrediuntur juxta Trigonales, quæque ad præcedentem seriem se habet, ut d ad $d-1$; unde summa ejus invenitur $\propto \frac{cd^4}{b \ln Q: d-1}$. Generaliter, si propositæ seriei numeratores sint juxta figuratos cujuslibet gradûs, ejus summa se habebit ad summam similis seriei gradûs præcedentis, ut d ad $d-1$; unde reliquarum omnium summam invenire proclive admodum est.

4. Si Numeratores sunt juxta Quadratos:

Series L resolvitur in aliam M , cujus numeratores sunt Arithmetice progressionales, adeoq; juxta primam hypothesein:

$$L \propto \frac{c}{b} + \frac{4c}{bd} + \frac{9c}{b^2d} + \frac{16c}{bd^2} \&c.$$

$$\left. \begin{aligned} \frac{c}{b} + \frac{c}{bd} + \frac{c}{b^2d} + \frac{c}{bd^2} \&c. &\propto \frac{cd}{b^2d-b} \\ + \frac{3c}{bd} + \frac{3c}{b^2d} + \frac{3c}{bd^2} \&c. &\propto \frac{3c}{bd-b} \\ + \frac{5c}{b^2d} + \frac{5c}{bd^2} \&c. &\propto \frac{5c}{b^2d-bd} \\ + \frac{7c}{bd^2} \&c. &\propto \frac{7c}{bd^2-bdd} \\ \&c. &\propto \&c. \end{aligned} \right\}$$

$$M \propto \frac{cdd}{b \ln Q: d-1} + \frac{2cdd}{b \ln C: d-1} \\ \propto \frac{cd^3 + cdd}{b \ln C: d-1}$$

5. Si Numeratores sunt juxta Cubos:

Series resolvitur in aliam, cujus numeratores sunt Trigonaliû sextupli unitate aucti; unde ejus summa juxta secundam hypothesein invenitur $\frac{cdd}{b \ln Q: d-1} + \frac{6cd^3}{b \ln Q: d-1} \propto \frac{cd^4 + 4cd^3 + cdd}{b \ln Q: d-1}$. Exempli loco sint series sequentes, Numeratorum

$$\text{Naturalium} \quad \frac{1}{2} + \frac{2}{4} + \frac{3}{8} + \frac{4}{16} + \frac{5}{32} \&c. \propto 2$$

$$\text{Trigonaliû} \quad \frac{1}{2} + \frac{3}{4} + \frac{6}{8} + \frac{10}{16} + \frac{15}{32} \&c. \propto 4$$

Pyramidalium

$$\text{Pyramidalium } \frac{1}{2} + \frac{4}{4} + \frac{10}{8} + \frac{20}{16} + \frac{35}{32} \&c. \propto 8$$

$$\text{Quadratorum } \frac{1}{2} + \frac{4}{4} + \frac{9}{8} + \frac{16}{16} + \frac{25}{32} \&c. \propto 6$$

$$\text{Cuborum } \dots \frac{1}{2} + \frac{8}{4} + \frac{27}{8} + \frac{64}{16} + \frac{125}{32} \&c. \propto 26.$$

Coroll. Patet, in omnibus hujusmodi seriebus postremos terminos in nihilum definere, & evanescere debere (quod ipsum jam præced. Prop. de earum unâ ex abundanti ostendimus;) cum aliâs illarum summæ finitæ esse non possent.

XV. *Invenire summam seriei infinitæ fractionum R, quarum numeratores constituunt seriem aequalium, denominatores verò Trigonalium, eorumvè æque-multiplicium.*

Si à serie harmonicè proportionalium N, eademmet multata primo termino P subtrahatur, exoritur nova series Q, cujus denominatores Trigonalium dupli sunt, cujusque adeò summa æqualis erit ipsi primo termino seriei Harmonicæ N, per Ax. 3.

$$\text{Operatio talis: A serie } N \propto \frac{a}{c} + \frac{a}{2c} + \frac{a}{3c} + \frac{a}{4c} + \frac{a}{5c} \&c.$$

$$\text{Subtracta series } P \propto \frac{a}{2c} + \frac{a}{3c} + \frac{a}{4c} + \frac{a}{5c} + \frac{a}{6c} \&c. \propto N - \frac{a}{c}$$

$$\text{relinquit seriem } Q \propto \frac{a}{2c} + \frac{a}{6c} + \frac{a}{12c} + \frac{a}{20c} + \frac{a}{30c} \&c. \propto \frac{a}{c}$$

$$\text{cujus duplum } R \propto \frac{a}{c} + \frac{a}{3c} + \frac{a}{6c} + \frac{a}{10c} + \frac{a}{15c} \&c. \propto \frac{2a}{c}$$

series scil. fractionum proposita, quarum denominatores sunt numeri Trigonales, eorumvè æque-multiplices.

Observandum tamen, non sine cautelâ hac utendum esse methodo: Nam si à sequente serie S eadem demto primo termino T subtrahatur, prodibit series Q, quæ antea; nec tamen inde sequitur, summam seriei Q, æqualem esse primo termino seriei S $\propto \frac{2a}{c}$. Cujus rei ratio est, quòd, si à serie S subtrahitur series terminorum totidem T, in quâ singuli termini postremum præcedentes singulos primum consequentes in alterâ destruunt, residuum, hoc est resultans series Q, evidenter debet adæquari primo termino seriei S minus ultimo ipsius T; adeoque ipsi primo seriei S absolute æqualis esse nequit, nisi tum cum ultimus ipsius T in nihilum definit, uti quidem definere perspicuum est in serie P vel N; at non evanescit pariter in serie T vel S, verum est $\propto \frac{a}{c}$, per X. Quin itaque potius summa seriei Q $\propto \frac{2a}{c} - \frac{a}{c} \propto \frac{a}{c}$, ut supra. B S $\propto$

$$S \propto \frac{2a}{c} + \frac{3a}{2c} + \frac{4a}{3c} + \frac{5a}{4c} + \frac{6a}{5c} \&c.$$

$$T \propto \frac{3a}{2c} + \frac{4a}{3c} + \frac{5a}{4c} + \frac{6a}{5c} + \frac{7a}{6c} \&c.$$

$$Q \propto \frac{a}{2c} + \frac{a}{6c} + \frac{a}{12c} + \frac{a}{20c} + \frac{a}{30c} \&c. \propto \frac{2a}{c} - \frac{a}{c} \propto \frac{a}{c}$$

XVI. Summa seriei infinitæ harmonicæ progressionaliū, $\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} \&c.$ est infinita.

Id primusprehendit Frater : inventâ namque per præced. summâ seriei $\frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{12} + \frac{1}{20} + \frac{1}{30} \&c.$ visurus porrò, quid emergeret ex istâ serie, $\frac{1}{2} + \frac{2}{6} + \frac{3}{12} + \frac{4}{20} + \frac{5}{30} \&c.$ si resolveretur methodo prop. XIV. collegit propositionis veritatem ex absurditate manifestâ, quæ sequeretur, si summa seriei harmonicæ finita statueretur. Animadvertit enim,

Seriem A, $\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} \&c. \propto$ (fractionibus singulis in alias, quarum numeratores sunt 1, 2, 3, 4, &c. transmutatis)

seriei B, $\frac{1}{2} + \frac{2}{6} + \frac{3}{12} + \frac{4}{20} + \frac{5}{30} + \frac{6}{42} \&c. \propto C + D + E + F \&c.$

$$\left. \begin{array}{l} C. \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{12} + \frac{1}{20} + \frac{1}{30} + \frac{1}{42} \&c. \propto \text{per præc. } \frac{1}{1} \\ D. \dots + \frac{1}{6} + \frac{1}{12} + \frac{1}{20} + \frac{1}{30} + \frac{1}{42} \&c. \propto C - \frac{1}{2} \propto \frac{1}{2} \\ E. \dots + \frac{1}{12} + \frac{1}{20} + \frac{1}{30} + \frac{1}{42} \&c. \propto D - \frac{1}{6} \propto \frac{1}{3} \\ F. \dots + \frac{1}{20} + \frac{1}{30} + \frac{1}{42} \&c. \propto E - \frac{1}{12} \propto \frac{1}{4} \\ \&c. \propto \&c. \end{array} \right\} \propto G; \text{ unde sequitur, seriei } em G \propto A, \\ \text{(totum parti, si summa finita esset.)}$$

Ego postmodum, cum indicâset, idem ostensivè hunc in modum : Summa seriei infinitæ harmonicæ $\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} \&c.$ superat datum quemvis numerum. Ergò infinita est, per II. Esto datus numerus N quantumcunque magnus : Abscinde à principio seriei aliquot terminos, quorum summa æquet vel superet unam unitatem numeri N, & à serie reliquâ iterum aliquos abscinde, quorum summa aliam unitatem numeri N superet, idque si fieri possit repetere toties, quot in numero N sunt unitates ; sic termini abscissi omnes superabunt totum numerum, multò magis igitur tota series eundem

eundem superabit. Si neges, abscissis aliquot reliquos unitatem superare posse, esto primus reliquorum, qui post abscissionem ultimam remanserunt, $\frac{1}{a}$, & sequentes $\frac{1}{a+1}$, $\frac{1}{a+2}$, $\frac{1}{a+3}$, &c. Constitutur ad duos primos terminos $\frac{1}{a}$ & $\frac{1}{a+1}$ Progressio Geometrica, cujus idè singuli post secundum termini singulis respondentibus in Progressione Harmonicâ minores sunt ob denominatores majores, per IV. & continuetur hæc usque ad $\frac{1}{aa}$ (quod quidem fiet in terminis numero finitis propter a numerum finitum) eritque hæc series Geometrica finita $\propto 1$, per VIII. Harmonica itaque terminorum totidem superabit unitatem. Q. E. D.

Coroll. 1. In propositâ serie initio sumto à quolibet termino, erunt ab illo deinceps omnes, usque ad illum, cujus locus designatur per quadratum numeri ordinis primi termini, simul sumti unitate majores: sic termini à 2do ad 4tum usque unitatem superant, hinc à 5to ad 25tum, hinc à 26 ad 676 (Q: 26) hinc à 677 ad 458329 (Q: 677) &c. Nam in Geometricâ progressionem termini his limitibus intercepti unitatem æquant; ergò in Harmonicâ superant, ubi & plures intercipiuntur & majores; majores quidem uti vidimus; plures, quia denominatores terminorum, cum sint minores quàm in Geometricâ per IV, tardiùs illos limites assequuntur.

2. Patet, omnem aliam seriem harmonicam infinitam, summam quoque exhibere infinitam; ut ex.gr. si loco $\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4}$ &c. proponatur $\frac{1}{1000} + \frac{1}{2000} + \frac{1}{3000} + \frac{1}{4000}$ &c. ubi singuli termini singulorum sibi respondentium in alterâ, adeoque & omnes omnium, sunt submillecupli: nam infiniti pars millesima & ipsa infinita est.

3. Summa seriei infinitæ, cujus postremus terminus evanescit, quandoque finita est, quandoque infinita.

4. Sequitur etiam, si modò in Geometriam saltum facere permissum est, spatium Curvâ Hyperbolicâ & Asymptotis comprehensum infinitum esse: Secta intelligatur Asymptotos linea à centro A in partes æquales infinitas in punctis B, C, D, E , &c. è quibus ad curvam educantur rectæ totidem alteri Asymptotòn parallelæ BM, CN, DO, EP , &c. & compleantur parallelogramma AM, BN, CO, DP , &c. quæ ob basium æqualitatem inter se erunt, ut altitudines, seu ut rectæ BM, CN, DO, EP , &c. hoc est, ut $\frac{1}{1}, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}$ &c. ex naturâ

Hyperbolæ; cum igitur summa $\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} \&c.$ infinita ostensa sit, erit & summa Parallelogrammorum $AM, BN, CO, DP \&c.$ infinita, multoque magis spatium Hyperbolicum, quod Parallelogrammis illis circumscriptum est.

XVII. *Invenire summam serierum Leibnitzianarum, D. H. I. aliarumq, quarum denominatores sunt numeri Quadrati aut Trigonaes, minuti aliis Quadratis vel Trigonalibus.*

Cel. Leibnitius occasione mirabilis suæ Quadraturæ Circuli in principio Actorum Lips. publicatæ, mentionem injicit summæ quarundam serierum infinitarum, quarum denominatores constituunt seriem quadratorum unitate minorum, dissimulato quo eam repererat artificio. En breviter totum mysterium:

A serie $A \propto \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} \&c.$ subtrahatur ipsamet demtis duobus

primis terminis, $B \propto \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} \&c. \propto A - \frac{1}{1} - \frac{1}{2}$

relinquitur $C \propto \frac{2}{3} + \frac{2}{8} + \frac{2}{15} + \frac{2}{24} + \frac{2}{35} \&c. \propto A - B \propto \frac{1}{1} + \frac{1}{2} - \frac{2}{2}$

& propterea $D \propto \frac{1}{3} + \frac{1}{8} + \frac{1}{15} + \frac{1}{24} + \frac{1}{35} \&c. \propto \frac{1}{2} C \propto \frac{3}{4}$

A serie $E \propto \frac{1}{1} + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} + \frac{1}{9} \&c.$ subtrahatur eadem demto primo

termino, $F \propto \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} + \frac{1}{9} + \frac{1}{11} \&c. \propto E - 1$

relinquitur $G \propto \frac{2}{3} + \frac{2}{15} + \frac{2}{35} + \frac{2}{63} + \frac{2}{99} \&c. \propto E - F \propto 1$

& propterea . . . $H \propto \frac{1}{3} + \frac{1}{15} + \frac{1}{35} + \frac{1}{63} + \frac{1}{99} \&c. \propto \frac{1}{2} G \propto \frac{1}{2}$

& proinde etiam $I \propto \frac{1}{8} + \frac{1}{24} + \frac{1}{48} + \frac{1}{80} + \frac{1}{120} \&c. \propto D - H \propto \frac{3}{4} - \frac{1}{2} \propto \frac{1}{4}$
Quod ipsum quoque sic ostenditur:

A serie $L \propto \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{6} + \frac{1}{8} + \frac{1}{10} \&c.$ subtrahatur eadem demto primo

termino, $M \propto \frac{1}{4} + \frac{1}{6} + \frac{1}{8} + \frac{1}{10} + \frac{1}{12} \&c. \propto L - \frac{1}{2}$

relinquitur $N \propto \frac{2}{8} + \frac{2}{24} + \frac{2}{48} + \frac{2}{80} + \frac{2}{120} \&c. \propto L - M \propto \frac{1}{2}$

& proinde $I \propto \frac{1}{8} + \frac{1}{24} + \frac{1}{48} + \frac{1}{80} + \frac{1}{120} \&c. \propto \frac{1}{2} N \propto \frac{1}{4}$, ut antea.

Memorable

Memorable autem prorsus est, quod summa seriei D , $\frac{1}{3} + \frac{1}{8} + \frac{1}{15} + \frac{1}{24} + \frac{1}{35} + \frac{1}{48} + \frac{1}{63} \&c.$ (cujus denominatores sunt numeri quadrati 4, 9, 16, 25, 36, &c. unitate minuti) invenitur $\frac{3}{4}$, quin & excerptis per saltum alternis terminis, summa seriei H , $\frac{1}{3} + \frac{1}{15} + \frac{1}{35} + \frac{1}{63} \&c.$ $\propto \frac{1}{2}$; at si ex hac iterum simplici saltu terminos loco pari positos excerptas, ut relinquatur $\frac{1}{3} + \frac{1}{35} + \frac{1}{99} \&c.$ ejus seriei infinitæ summa est vera magnitudo circuli nullo numero exprimibilis, sumto vid. quadrato diametri $\propto \frac{1}{2}$.

Cæterum generaliter invenire possumus summam cujuslibet seriei, cujus numeratores constituunt seriem æqualium, & denominatores seriem quadratorum minutorum communi aliquo quadrato Q . aut etiam seriem Trigonalium minutorum communi aliquo numero Trigonalis T : si observemus, ejusmodi series nasci per subtractionem seriei harmonicæ truncatæ ab initio tot terminis (quot indicat ibi duplum radices quadratæ communis quadrati Q , hic duplum unitate auctum radices trigonalis numeri trigonalis T) à se ipsâ integrâ:

Ex.gr. ad inveniendam summam seriei D , $\frac{1}{7} + \frac{1}{16} + \frac{1}{27} + \frac{1}{40} + \frac{1}{55} \&c.$
 cujus denominatores sunt quadrati, 16, 25, 36, 49, 64, 81, &c.
 minuti communi Quadrato Q . . . 9, 9, 9, 9, 9.
 (cujus Radix Q . 3, & duplum 6.) $\frac{7, 16, 27, 40, 55, 72, \&c.}{}$

A serie $A \propto \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} \&c.$ subtrahatur
 eadem multata sex

primis terminis $B \propto \frac{1}{7} + \frac{1}{8} + \frac{1}{9} + \frac{1}{10} + \frac{1}{11} + \frac{1}{12} \&c.$

relinquitur $C \propto \frac{6}{7} + \frac{6}{16} + \frac{6}{27} + \frac{6}{40} + \frac{6}{55} + \frac{6}{72} \&c. \propto A - B \propto$
 $\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} \propto 2 \frac{9}{20}$

adeoque $D \propto \frac{1}{7} + \frac{1}{16} + \frac{1}{27} + \frac{1}{40} + \frac{1}{55} + \frac{1}{72} \&c. \propto \frac{1}{6} C \propto \frac{49}{120}.$

Rurfus pro inveniendâ summâ seriei $E, \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{15} + \frac{1}{22} + \frac{1}{30} + \frac{1}{39} \&c.$

cujus denominatores sunt Trigonales 10, 15, 21, 28, 36, 45, &c.
minuti communi Trigonalis $T \dots 6, 6, 6, 6, 6, 6,$

(cujus Radix Trigon. 3. & duplum 4, 9, 15, 22, 30, 39, &c.
unitate auctum 7)

A serie... $A \propto \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} \&c.$ subtrahatur eadem truncata septem primis terminis

$$F \propto \frac{1}{8} + \frac{1}{9} + \frac{1}{10} + \frac{1}{11} + \frac{1}{12} + \frac{1}{13} + \frac{1}{14} \&c.$$

$$\text{relinquitur } G \propto \frac{7}{8} + \frac{7}{18} + \frac{7}{30} + \frac{7}{44} + \frac{7}{60} + \frac{7}{78} + \frac{7}{98} \&c. \propto A - F \propto$$

$$\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} \propto \frac{363}{140}$$

$$\text{adeoque... } E \propto \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{15} + \frac{1}{22} + \frac{1}{30} + \frac{1}{39} + \frac{1}{49} \&c. \propto \frac{2}{7} G \propto \frac{363}{490}$$

Atque ita per hanc Propositionem inveniri possunt summæ serierum, cum denominatores sunt vel numeri Trigonales minuti alio Trigonalis, vel Quadrati minuti alio Quadrato; ut & per XV, quando sunt puri Trigonales, ut in serie $\frac{1}{1} + \frac{1}{3} + \frac{1}{6} + \frac{1}{10} + \frac{1}{15} \&c.$

at, quod notatu dignum, quando sunt puri Quadrati, ut in serie $\frac{1}{1} + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{16} + \frac{1}{25} \&c.$ difficilior est, quàm quis expectaverit, summæ pervestigatio, quam tamen finitam esse, ex alterâ, quâ manifestò minor est, colligimus: Si quis inveniat nobisque communicet, quod industriam nostram elusit hætenus, magnas de nobis gratias feret.

Hoc saltèmonere adhuc liceat, quòd spatium Hyperboloide Cubicali (cujus natura exprimitur per æquationem $xyz \propto aab$, hoc est, in quâ Quadrata abscissarum ex Asymptotis sunt in applicatarum ratione reciproca.) & Asymptotis suis comprehensum, eodem modo ex finitâ hujus seriei summâ finitum esse demonstrari possit,

quo simile spatium in ipsâ Hyperbolâ ex infinitâ seriei

Harmonicæ summâ infinitum

ostensum est.

ΕΠΙΜΕΤΡΑ.

ΕΠΙΜΕΤΡΑ.

I.

Sicut nec corpus infinitum, ita nec atomum dari posse credo, sed utrumque nudam mentis fictionem esse puto, quæ, postquam corpus corpori aliquandiu addidit ademitvè, pertasa tandem operationis sine fine repetenda, omnes multiplicationes vel divisiones uno immensi saltu transilit, ultimamq; jam factam esse, quam tamen unquam fieri rupugnat, *περὶ ἁπλοῦς* supponit.

II.

Vacuum, eo modo quo concipi à nobis solet, necessario datur.

III.

Hinc vacui metus ineptè natura affingitur, nec ullius phænomeni naturalis causa esse potest.

IV.

Fluviorum alvei non possunt esse perfectè horizontales, sed requiritur in illis ad minimum unius pedis declivitas in milliari: unde & fluminum ostia ipsorum scaturiginibus, Oceanus & loca maritima regionibus mediterraneis necessario depressiora sunt.

V.

Hinc verò non levis controversia, quæ vi aquæ ex Oceano in altissimorum montium cacumina revehantur: frustra saltem illi sunt, qui existimant, hoc ad eundem modum per angustos terra meatûs & canaliculos fieri posse, quo videmus, liquorem intrâ graciliores fistulas altius assurgere, quàm consistit externi liquoris superficies.

VI.

Solutio questionum circà figuram & situm Iridis, quam antehâc in rore prati conspexit Christ. Menzelius, ut refert in Ephem. Nat. Curios: An. 1686. & quâ in re omnium cujusque loci Mathematicorum opem implorat, facilis est. nulloq; Archimede indiget. Nam I. si Solis altitudo $\angle 42. gr.$ Iris

ap-

apparebit Hyperbolica: si $\propto 42$. gr. Parabolica: si $\propto 42$. Elliptica: si 90, Circularis. II. Axis Iridis perpetuò est in lineâ umbra intuentis hominis. III. Elevatione oculi suprà terrâ planitiem sumtâ pro radio, distantia proximi verticis Coni sectionis à loco stationis, est Tangens differentia inter 48. gr. & arcum elevat: Solis, numeranda à facie, ubi $48 \propto$ elev. solis; à tergo, ubi $\propto$. IV. Latus rectum in omni casu est duplum Tangentis 42 graduum. V. Transversum, in Hyperbolâ, Aggregatum ex Tangente summa & Tangente differentia 48. gr. & elevationis solis: in Ellipsi, existente elevatione solis $\propto 48$ gr. Aggregatum ex Tangente summa & Tang. diff. 42. gr. & compl. altitudinis solis; existente verò elev. solis $\propto 48$, Differentia earundem.

VII.

Lineam Spiralem Archimedeam dimidiam esse peripheria sui circuli, male asserit Cl. Sturmîus in Mathesi suâ Enucleatâ.

VIII.

Agrimensoriam nisi Geometria peritus ritè exercere non potest; unde in Rebusp. non citrà insigne præjudicium ejus cura illiteratis & plebejis committi solet.

AD DN. RESPONDENTEM
PRÆSES.

UT non-finitam seriem finita coërcet
Summula, & in nullo limite limes adest:
Sic modico immensi vestigia Numinis hærent
Corpore, & angusto limite limes abest.
Cernere in immenso parvum, dic, quanta voluptas!
In parvo immensum cernere, quanta, Deum!

F I N I S.